USPOŘÁDÁNÍ

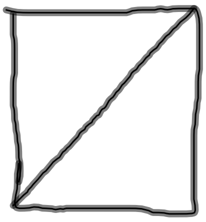
Relace na množině A je podmnožina $A \times A$

$\rho \subseteq A \times A$, $\quad (x,y) \in \rho \iff x \rho y$

Relace ρ na A je

1) REFLEXIVNÍ, když $\forall x \in A$ platí $x \rho x$.
2) ANTISYMETRICKÁ, když $\forall x,y \in A$

$$x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$$



3) TRANZITIVNÍ, když $\forall x,y,z \in A$

$$x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z.$$

Relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá USPOŘÁDÁNÍ.

Často značíme $\leq$.

Př: 1) A ... množina, $id_A = \{(x,x) \in A \times A \mid x \in A\}$

2) $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$

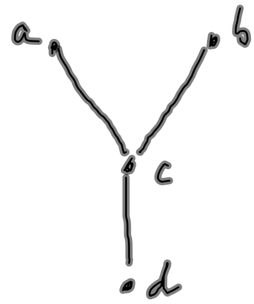
3) A, $P(A) = 2^A$ ... množina všech podmn. A

relace $\subseteq$

4) $(\mathbb{N}, |)$, $a | b \iff \exists m \in \mathbb{N} : am = b$.

Značení $a < b :\iff a \leq b \wedge a \neq b$.

Prvky a, b uspořádané množiny A jsou SROVNATELNÉ, když $a \leq b$ nebo $a \geq b$. A se nazývá ŘETĚZEC, když každé dva prvky jsou srovnatelné.



<u>Def.</u> $(A, \leq)$ usp. množina. Prvek $x \in A$ se nazývá

- NEJMENŠÍ, když $x \leq a \ \forall a \in A$.
- NEJVĚTŠÍ, když $a \leq x \ \forall a \in A$.
- MAXIMÁLNÍ, když neexistuje $a \in A$ tak, že $x < a$.
- MINIMÁLNÍ, když neex. $a \in A$ tak, že $a < x$.

<u>Def.</u> $(M, \leq)$, $A \subseteq M$. Prvek $x \in M$ se nazývá

- DOLNÍ ZÁVORA mn. A, když $x \leq a \ \forall a \in A$.
- HORNÍ ZÁVORA mn. A, když $a \leq x \ \forall a \in A$.
- SUPREMUM mn. A, když je to nejmenší prvek množiny horních závor, $x = \sup A$.
- INFIMUM mn. A, když je to největší prvek mn. dolních závor, $x = \inf A$.

<u>Def.</u> $(M, \leq), (N, \leq)$ usp. mn.

Zobrazení $f: M \to N$ se nazývá IZOTONNÍ, když

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Když f je bijekce a f i f^{-1} jsou izotonní, pak f je IZOMORFISMUS a $(M, \leq), (N, \leq)$ jsou IZOMORFNÍ.

Př. 1 $id: (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní.

$$a | b \Rightarrow a \leq b$$

$id: (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, |)$ není izotonní.

Def $(M, \leq)$ usp. mn. taková, že $\forall\, x, y \in M$ existuje $\inf\{x,y\}$ i $\sup\{x,y\}$. Pak M je SVAZOVĚ USPOŘÁDANÁ.

Př: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ $\quad X, Y \in \mathcal{P}(A)$ $\quad (X, Y \subseteq A)$

$$\inf\{X,Y\} = X \cap Y$$
$$\sup\{X,Y\} = X \cup Y$$

Tvrzení Buď $(M, \leq)$ svazově uspořádaná množina. Označme $x \vee y := \sup\{x,y\}$, $x \wedge y := \inf\{x,y\}$.

Pak

$$\begin{array}{ll} x \vee x = x & x \wedge x = x \\ x \vee y = y \vee x & x \wedge y = y \wedge x \qquad (*) \\ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \\ x \vee (y \wedge x) = x & x \wedge (y \vee x) = x \end{array}$$

$\forall\, x, y, z \in M$.

SVAZY

Alg. struktura $(M, \wedge, \vee)$ se nazývá SVAZ, když jsou splněny podmínky $(*)$. $\wedge$ se nazývá PRŮSEK, $\vee$ se nazývá SPOJENÍ.

Tvrzení L … svaz. $\forall\, a, b, x \in L$ platí

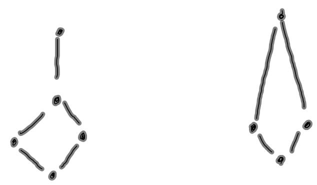
1) $a \leq b \Rightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$
2) $a \leq b \Rightarrow a \vee x \leq b \vee x$
3) $x \leq a,\ x \leq b \Rightarrow x \leq a \wedge b$
4) $x \geq a,\ x \geq b \Rightarrow x \geq a \vee b$

Def PODSVAZ svazu $(M, \wedge, \vee)$ je podmnožina $A \subseteq M$ taková, že $\forall\, x, y \in A$ platí $x \wedge y \in A$ i $x \vee y \in A$.

Př:

je podsvaz.

Př:



<u>Def</u> $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy

zobr. $f: X \to Y$ se nazývá HOMOMORFISMUS svazů, když $\forall\, a, b \in X$ platí

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

<u>Tvrzení</u> Každý homomorfismus svazů je izotonní zobr.

ÚPLNÉ SVAZY